

## 従動力を受けたトラス構造物の不安定振動の解析

著者	亀岡 翔太, 有末 宏明
引用	大阪府立工業高等専門学校研究紀要, 2007, 41, p.1-10
URL	<a href="http://doi.org/10.24729/00007622">http://doi.org/10.24729/00007622</a>

# 従動力を受けたトラス構造物の不安定振動の解析

亀岡翔太\*, 有末宏明\*\*

Analysis of the Unstable Oscillation of the Truss Structure under a Follower Force

Shouta KAMEOKA\*, Hiroaki ARISUE \*\*

## ABSTRACT

This paper describes the analysis of the unstable oscillation of the truss structure subjected to the follower force, which acts always vertically to the cross section of the truss structure. When the force exceeds the critical value, the unstable oscillation occurs, which is called fluttering phenomenon. It was shown by Nakatani et al. previously, that this phenomenon actually occurs in the numerical simulation, but its mechanism has never been described. In this research, we clarify the mechanism of the occurrence of the fluttering phenomenon by using the analytical method and the computer simulation. Theoretically, this fluttering phenomenon can be understood as the solution of the standard linear equation of the beam, if we take into account its complex valued solution.

**Key Words:** unstable oscillation, truss structure.

## 1. 序論

現在, コスト削減, 出力強化のための構造物の大型軽量化の傾向が進んでおり, それにより振動しやすい構造物が増えてきているのが現状である. 主に飛行機, 宇宙ステーション, ロケットなどがその例で, 有人のものが多く, その安全性の要求は高くなっている.

特に問題視されているのはフラッター現象という一定の振幅, 周期を持つ振動現象で, 構造物に致命的な破損をもたらすことがある. 実際にHIIロケットではフラッター現象が原因の事故も過去に起こっており, 回避のための研究が盛んに行われている.

細長い構造物において常にその長さ方向に働く力を従動力と呼ぶ(詳細は 2.2 節). この従動力を受ける構造物もフラッター振動を起こす. この現象を線形化した方程式は解析的に解くことができ, 変位が小さい範囲では極めて有用な知見を与えてくれる. 一方変位がある値より大きくなると非線形効果が効いてくるために, それらの効果を精確に取り入れた計算が必要になる. 非線形効果の正確な計算のために, 本研究では単純化, 高速度化を考慮し分子動力学法によるコンピューターシミュレーションを用いた解析を行う. プログラム言語は計算速度, 方程式の扱いやすさ, 複素数の範囲まで拡張できること

から FORTRAN を用いる.

本研究の目的として, 中谷氏<sup>1)</sup>らは, 従動力を受ける構造物は実際にフラッター現象や面外振動の現象を起こす事がコンピューターシミュレーションを用いて示されているが, それらの現象の発生のメカニズムについての記述は無い. よって本研究では, フラッター現象及び面外振動発生のメカニズムの解明を第一目標として研究を行う.

## 2. 理論

### 2.1 トラス構造

トラス構造物とは構造形式のひとつで, 部材の節点をピン接合とし, 三角形を基本にして組んだ構造である. 力は棒材にかかる単軸力のみであり, シミュレーションには最適である. また長さを決めておき, その間の分割数を無限に多く取れば梁として扱うことが可能である. 図1は, 今回用いるトラス構造物である.

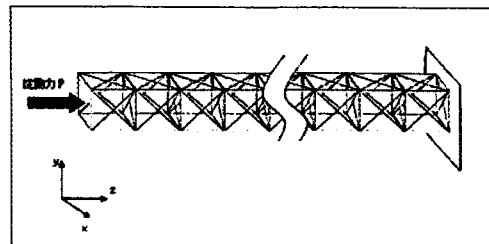


図1 トラス構造物

2007年4月11日 受理

\* 京都大学工学部 (Faculty of Engineering, Kyoto University)

\*\* 総合工学システム学科 機械システムコース

(Dept. of Industrial Systems Engineering: Mechanical Systems Course)

### 2.2 従動力

従動力とは、一般に一方方向に長い構造物において、長さ方向に垂直な断面に対して常に垂直にかかる力(図 2)で、この力を受ける構造物はフラッター振動が起りやすい。

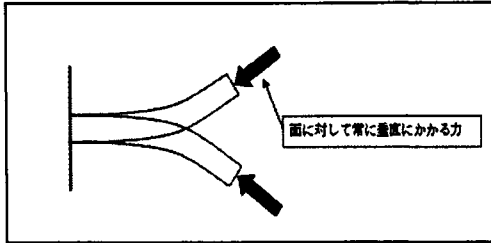


図 2 従動力

### 2.3 フラッター現象

物体に従動力をかける場合、構造物の長さに対して長さ方向と垂直な断面のサイズが小さいと振動が起こる。従動力が小さい場合は振動しても振幅は徐々に減衰していくが、従動力がある値を超えると、わずかな初期振動を与えても振幅は減衰するどころか逆に成長し、一定時間後に初期の振幅に比べて著しく大きな一定の振幅にまで成長し、その後は一定の周波数を持つうなりに似た周期振動を示す。この現象をフラッター現象という。

### 2.4 面外振動

今回の研究ではトラス構造物に長さ方向と垂直な方向に初速度を加えてその後の様子を観察するのであるが、ある時刻になると長さ方向と垂直な面内で初速度と垂直な方向に振動しはじめる。ここでは、初速度方向の振動を面内振動、それ以外を面外振動と定義する。

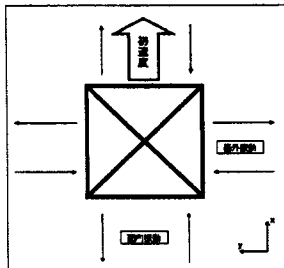


図 3 面外振動

### 2.5 計算方法

本研究では、先に述べたように計算アルゴリズムとして分子動力学法を用いる。分子動力学法は本来、分子の運動をシミュレーションする際に、分子を一つの質点と考えることにより分子一つ一つに運動方程式を当てはめる方法である。今回のシミュレーションではこの考えを

応用し、トラスの接合部を周りの部材の質量も含めた一つの質点と考え、周りの質点から及ぼされる力を計算し運動方程式を適用することで、その後の運動を求める。

運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

である。ここで  $m_i, \mathbf{r}_i$  は質点  $i$  における質量と位置を表す。 $\mathbf{F}_i$  は各質点からの相互作用による合力である。今回の研究では運動方程式をもとに、 $\mathbf{r}_i$  の  $\Delta t$  秒後における位置  $\mathbf{r}_i(t + \Delta t)$  を計算するため、その誤差が  $(\Delta t)^3$  に比例するベルレの方法を用いる。その計算式は

$$\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = 2\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(t - \Delta t) + \frac{\mathbf{F}_i(t)}{m_i} (\Delta t)^2 + O(\Delta t)^4 + \dots$$

で与えられる。また速度  $\mathbf{v}_i$  は

$$\mathbf{v}_i(t) = \frac{\mathbf{r}_i(t + \Delta t) - \mathbf{r}_i(t - \Delta t)}{2\Delta t}$$

で求めることが可能である。

### 2.6 線形の方程式

今回の研究では、線形の方程式を解いた結果と、シミュレーションの結果を比較・検討する。そのためまずは線形の方程式について述べる。梁の曲げに関してベルヌーイ・オイラーの初等曲げ理論が成立するものとすれば、横断面内の曲げモーメント  $M$  は、長さ方向を  $x$ 、変位方向を  $y$  とすれば

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

という関係がある。ここで  $EI$  は曲げ剛性を表している。また、せん断力  $F$  と曲げモーメント  $M$  との関係は

$$F = \frac{\partial M}{\partial x} \quad \dots \textcircled{1}$$

という関係があることが知られている。次に従動力を受ける場合の線形の方程式を求める。

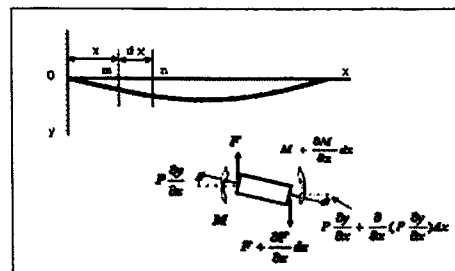


図 4 従動力が作用する場合

今、図 4 の位置  $x$  における微小要素  $m-n$  に示すように力およびモーメントが作用している。したがって  $m-n$  の  $y$  方向の運動方程式は単位質量を  $\rho$ 、断面積を  $A$ 、せん断力  $F$ 、曲げモーメント  $M$  とすれば運動方程式より

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = (F + \frac{\partial F}{\partial x} dx) - F + (P \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (P \frac{\partial y}{\partial x}) dx) - P \frac{\partial y}{\partial x}$$

の関係がある。整理すると

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

①式により

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

これが従動力を受ける場合の梁の方程式である。

### 2.7 等価曲げ剛性率

今回の研究ではトラス構造物でシミュレーションを行い、線形の方程式における解析解と比較を行うため両方に関する次元の関係を求めておく必要がある。そこで、まずシミュレーションとトラス構造における梁の曲げ剛性率に相当する物理量を考える。その方法は計算シミュレーションで直接求めるものと、解析的に求める方法とがあるが、ここでは後者を採用する。

梁のトラス構造物における曲げ剛性率に相当する物理量を解析的に求める場合には、まずトラス構造物を曲げた際のトラスの 1 ユニットを考える。

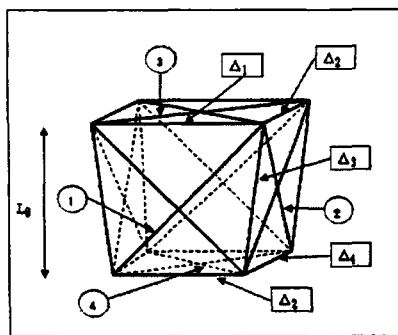


図 5 曲げた際のトラスの 1 ユニット

この場合における伸びによる力の関係と、各接点の合力が 0 となることから導かれること、また曲げモーメントと曲率の関係式

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

を考慮すれば、等価曲げ剛性率  $EI$  は次式で求められる。

$$EI = \frac{5}{4} k L_0^3$$

ここで、 $k$  は伸びに比例して生じる力の係数を意味し、 $L_0$  は各ユニットの長さを表す。本研究ではこれによって求められる剛性率を用いる。

### 3. 線型方程式の解析解

#### 3.1 線形の方程式

今回の研究では、線形の方程式を解いた解とシミュレーションの結果とを比較・検討する。まず線形の方程式について、その解を求める。

従動力を受ける梁の方程式は

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

であることは既に示した。いま考えている梁の長さを  $L$  とする。 $\tau = L \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$  と  $L$  をそれぞれ時間と長さの単位にとるように  $\tilde{t} = \tau t$ 、 $\tilde{x} = L x$  の無次元化を行った後、改めて  $\tilde{t}$  を  $t$ 、 $\tilde{x}$  を  $x$  と書くことにすれば

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - 2p' \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

ただし、 $p' = \frac{2EI}{L^2} p$  とした。

この方程式の

$$y = f(x) \sin(\omega t + \phi)$$

という変数分離型の解を求めると、 $f(x)$  についての方程式は

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - 2p' \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \omega^2 f = 0$$

境界条件は一端固定—他端自由に対応して

$$f(0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0 \dots (2)$$

とする。

$$f(x) = \exp(sx)$$

とおいて、

$$s^4 - 2p's^2 - \omega^2 = 0$$

$$s = \pm \sqrt{\sqrt{p'^2 + \omega^2} + p'}, \quad s = \pm i \sqrt{\sqrt{p'^2 + \omega^2} - p'}$$

したがって

$$\xi_+ = \sqrt{\sqrt{p'^2 + \omega^2} + p'}, \quad \xi_- = \sqrt{\sqrt{p'^2 + \omega^2} - p'}$$

とおくと、 $f(x)$  の一般解は

$$f(x) = D_1 \cosh \xi_+ x + D_2 \cos \xi_- x + D_3 \sinh \xi_+ x + D_4 \sin \xi_- x.$$

境界条件①を満たすには

$$f(x) = D \left\{ (\cosh \xi_+ x - \cos \xi_- x) + \alpha \left( \frac{1}{\xi_+} \sinh \xi_+ x - \frac{1}{\xi_-} \sin \xi_- x \right) \right\}.$$

さらに境界条件②を満たすには

$$f''(x) = D \{ (\xi_+^2 \cosh \xi_+ x + \xi_-^2 \cos \xi_- x) + \alpha (\xi_+ \sinh \xi_+ x + \xi_- \sin \xi_- x) \},$$

$$f'''(x) = D \{ (\xi_+^3 \sinh \xi_+ x - \xi_-^3 \sin \xi_- x) + \alpha (\xi_+^2 \cosh \xi_+ x + \xi_-^2 \cos \xi_- x) \}$$

より,

$$(\xi_+^2 \cosh \xi_+ + \xi_-^2 \cos \xi_-) + \alpha (\xi_+ \sinh \xi_+ + \xi_- \sin \xi_-) = 0,$$

$$(\xi_+^3 \sinh \xi_+ - \xi_-^3 \sin \xi_-) + \alpha (\xi_+^2 \cosh \xi_+ + \xi_-^2 \cos \xi_-) = 0.$$

$\alpha$  を消去すると、これが解を持つには  $\omega$  は

$$(\xi_+^2 \cosh \xi_+ + \xi_-^2 \cos \xi_-)^2 = (\xi_+ \sinh \xi_+ + \xi_- \sin \xi_-) (\xi_+^3 \sinh \xi_+ - \xi_-^3 \sin \xi_-) \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たせばよい。

### 3.2 $\omega$ の固有値

先ほどの方程式②を満たす  $\omega$  の固有値を複素数の範囲にまで拡張したニュートン法を用いて解いた結果を図 6 に示す。

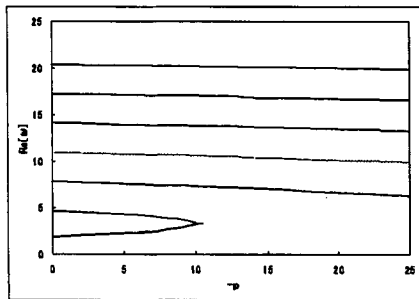


図 6  $\omega$  の実数解

ここで  $-p$  は無次元化した従動力, 負号は圧縮方向を表している。縦軸は各  $p$  に対する  $\omega$  の固有値を表す。  $-p$  の各々の値に対して  $\omega$  は無限個存在する。下から順にモード 1, モード 2, ... と呼ばれている。モード  $n$  では, 長さ方向の波形  $f(x)$  のゼロ点の数が  $(n-1)$  個である。図 6

をみれば分かるように,  $\omega$  のモード 1 とモード 2 の固有値が, 従動力が臨界値 ( $-p=10.0254$ ) に近づくにつれ接近していき, 臨界値において 2 つの  $\omega$  の固有値が重なってしまい, これ以上の  $-p$  の値に対しては対応する  $\omega$  が存在しないように見える。この点は臨界従動力と呼ばれている。

臨界従動力以下では, これらの一連の固有値を  $\omega_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) として, 梁の線形方程式の一般解は,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin(\omega_n t + \phi_n)$$

で与えられる。

一方従動力が臨界値を超えると, 上記 2 つの  $\omega$  に対応する  $\omega$  の解は実数の範囲では存在しない。では, 梁の線形方程式の一般解は, この 2 つの固有振動を除いて

$$u(x,t) = \sum_{n=3}^{\infty} f_n(x) \sin(\omega_n t + \phi_n) \dots (*)$$

で与えられるのであろうか。これは物理的に考えて極めて不自然である。

じつは  $\omega$  を複素数の範囲まで拡張することにより臨界値以上の従動力の場合にも, 上記 2 つの  $\omega$  に対応する  $\omega$  の解が得られることが分かる (図 7)。図 7 の点線は, 実数の範囲で考えた場合の  $\omega$  の固有値を表し, 実線は  $\omega$  の複素数解を表している。この図を見れば  $\omega$  を複素数の範囲にまで拡張することによって, 臨界従動力以上の従動力に対しても解が存在することがわかる。複素方程式の解は互いに複素共役の解を持つため複素解の虚部は上下に分かれている。  $-p$  と  $\omega$  との数値的な関係が導かれたため, 解析解を求めるが可能となった。

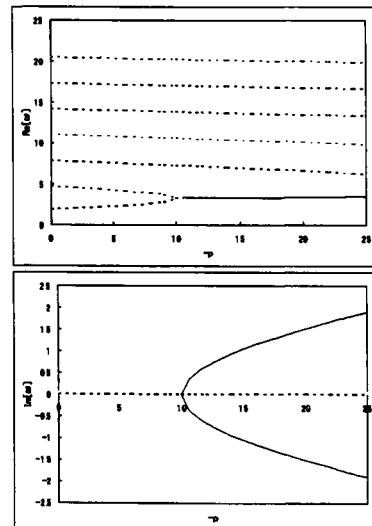


図 7  $\omega$  の複素数解

### 3.3 臨界従動力を超えた場合の解析解

ここでは、従動力の変化に対して実数解の個数が臨界従動力を超えた場合でも変わらない事を示す。

変位  $u$  を  $x$  と  $t$  の関数として

$$u(x, t) = f(x) \sin(\omega t + \phi) \cdots (A)$$

と置く。

$$\omega = \omega_a, \omega_b (\omega_a < \omega_b) : real, f(x) : real$$

その各々について  $\phi = 0, \phi = \pi/2$  の計 4 個の線形独立な固有解がある。

内訳は、初期条件  $u(x, 0) = 0$  を満たす解が 2 個と、

$$\text{初期条件 } \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{t=0} = 0 \text{ を満たす解が 2 個である。}$$

$$f(x) = f_0(x) + i f_1(x), \quad \omega = \omega_0 + i \omega_1$$

とおけば加法定理より

$$\begin{aligned} \sin[(\omega_0 + i \omega_1)t] &= \sin(\omega_0 t) \cos(i \omega_1 t) + \cos(\omega_0 t) \sin(i \omega_1 t) \\ &= \sin(\omega_0 t) \cosh(\omega_1 t) + i \cos(\omega_0 t) \sinh(\omega_1 t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) \sin[(\omega_0 + i \omega_1)t] &= [f_0(x) \sin(\omega_0 t) \cosh(\omega_1 t) - f_1(x) \cos(\omega_0 t) \sinh(\omega_1 t)] \\ &\quad + i [f_1(x) \sin(\omega_0 t) \cosh(\omega_1 t) + f_0(x) \sin(\omega_0 t) \sinh(\omega_1 t)]. \end{aligned}$$

よって、線形独立の実数解は

$$Re[ f(x) \sin \omega t ] = f_0(x) \sin(\omega_0 t) \cosh(\omega_1 t) - f_1(x) \cos(\omega_0 t) \sinh(\omega_1 t),$$

$$Im[ f(x) \sin \omega t ] = f_1(x) \sin(\omega_0 t) \cosh(\omega_1 t) + f_0(x) \sin(\omega_0 t) \sinh(\omega_1 t).$$

の二個である。この解は両方とも、 $u(x, 0) = 0$  の初期条件を満たす。

一方

$$u(x, t) = f(x) \sin(\omega t + \pi/2) = f(x) \cos(\omega t) \cdots (B)$$

とおくと、境界条件は(A), (B)で同じなので固有値  $\omega$ 、固有関数  $f(x)$  も同じになり先ほどと同じ計算で

$$\begin{aligned} \cos[(\omega_0 + i \omega_1)t] &= \cos(\omega_0 t) \cos(i \omega_1 t) - \sin(\omega_0 t) \sin(i \omega_1 t) \\ &= \cos(\omega_0 t) \cosh(\omega_1 t) - i \sin(\omega_0 t) \sinh(\omega_1 t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) \cos[(\omega_0 + i \omega_1)t] &= [f_0(x) \cos(\omega_0 t) \cosh(\omega_1 t) + f_1(x) \sin(\omega_0 t) \sinh(\omega_1 t)] \\ &\quad + i [f_1(x) \cos(\omega_0 t) \cosh(\omega_1 t) - f_0(x) \sin(\omega_0 t) \sinh(\omega_1 t)]. \end{aligned}$$

よって線形独立な実数解は

$$Re[ f(x) \cos \omega t ] = f_0(x) \cos(\omega_0 t) \cosh(\omega_1 t) + f_1(x) \sin(\omega_0 t) \sinh(\omega_1 t),$$

$$Im[ f(x) \cos \omega t ] = f_1(x) \cos(\omega_0 t) \cosh(\omega_1 t) - f_0(x) \sin(\omega_0 t) \sinh(\omega_1 t).$$

この解は両方とも  $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$  を満たす。

以上のことより固有値  $\omega$  を複素数として扱っても、線形独立な固有関数の数は不変である。  $t \geq 0$  より、これら 4 つ全ての関数は指数関数的に増加し発散してしまうことがわかる。  $t = 0$  における初期変位または初速度がいくら小さくても、振動の振幅はほぼ  $e^{\omega_1 t}$  に比例して増加し、いずれ振幅が梁の長さの数 10% の値にまで成長することが理解できる。(次の章で見るように、振幅が梁の長

さの数 10% にまで成長すると、線形方程式では無視されていた非線形の効果が顕著になり、線形近似は破綻する。しかしながら、それ以前の振幅が梁の長さの数 10% 以下の時点までは、この章での解析は極めて高い精度で成立する。)

梁の線形方程式の一般解は、上記の 4 つの独立な解の線形結合に 3.2 節の (\*) 式を加えたものである。

#### 4. シミュレーション

##### 4.1 解析モデル

本研究では、梁の連続性をトラス構造物で近似することとはすでに述べた。この章では今回考えたトラス構造物について記載する。

今回の研究では線形方程式を解いた結果とシミュレーション結果を見比べる。そのため、まず線形方程式を解析的に解く時に用いた次元の関係を表 1 に示す。

表 1 パラメーターの関係

パラメータ	線形の方程式 (無次元)	シミュレーション
段数 $n$	[-]	$n$
1 ユニットの長さ $L_0$	[-]	$L_0$
全長 $L$	1	$n \cdot L_0$
バネ定数 $k$	[-]	$c \cdot n^4$ (c:定数)
剛性率 $EI$	[-]	$5/4 \cdot k \cdot L_0^3$
従動力 $P$	$p$	$2EI/L^2 \cdot p$
時間 $t$	$t$	$t/\tau$

ここで  $\tau$  は  $\tau = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$  である。これらの関係は 3.1 で導いた結果を用いた。

「バネ定数」  $k$  の意味は、トラス構造物の各部材はその長さが  $L_0$  から  $\Delta L$  だけ伸びた(縮んだ)ときに縮む(伸びる)方向に大きさ  $k \Delta L$  の力を部材の結節点に力をおよぼすとする。この定数は段数の 4 乗に比例する。次に表 1 の関係で求めた今回のシミュレーションで使用する、トラス構造物のパラメーターを表 2 に示す

表 2 解析モデル

段数 $n$	100 (段)
1 ユニットの長さ $L_0$	10
全長 $L$	1000
バネ定数 $k$	$10^5$
剛性率 $EI$	$1.25 \times 10^8$

シミュレーションに用いる次元には特にこだわらないこ

とする。なぜなら、この研究では線形方程式と比較するために無次元を基本としており、どのような次元で計算しても普遍性が保たれるからである。もし現実の次元を持った量として求めたいのであれば、表1に当てはめた値を結果の章で示す値に照らし合わせれば、求めたい結果を得ることが可能である。なお本研究では、段数の意味するところは全長を基本とした分割数に相当し、この値が無限大の極限をとれば、連続体の梁として扱うことが出来る。またシミュレーションでは、フラッター振動発生の様子を直感的に理解するため時間のみ秒という次元に直して行う。

4.2 解析条件

次に解析条件を述べる。質点間の相互作用の力はフックの法則に従うとし、その力は

$$F = k\Delta$$

で求められるとする。ここでkはバネ定数、Δはある瞬間の棒材の伸びである。境界条件は一端固定他端自由して一番端の4つの接合点を固定する。従動力はz軸方向の圧縮力とする。各質点の力の計算には計算時間削減の手法として、互いに影響を及ぼしあう2つの質点間の力を計算し、それら2点に加わる力は符号が逆である事を利用した。また解析解と比較するために初速度として長さ方向をzとする関数

$$u(z, t) = f(z) \sin(\omega t)$$

を時間微分した関数を用いる。速度の関数v(z, t)とすれば

$$v(z, t) = \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = \omega f(z) \cos(\omega t)$$

で表される。よってその初速度はt=0とすれば初速度v(z, 0)は

$$v(z, 0) = \omega f(z)$$

を用いる。

4.3 分子動力学法の信頼性

今回のような構造物のシミュレーションでは一般に有限要素法が多く使われ、その信頼性の評価も高いものとなっている。しかし、今回の様な短い期間での研究では有限要素法のような計算時間がかかる計算アルゴリズムは、有限要素法をマスターする時間も含めて不向きである。したがってこの研究では考え方が比較的簡単で、精度の選択の自由度が高いなどの利点を考慮し分子動力学

法を用いるのであるが、その信頼度は明確でない。そのため本シミュレーションを開始する前に、その信頼性を確認する。

ここでは単に分子動力学法の信頼度を求めることが目的であるため、従動力がかからない梁の単振動について、解析的に導かれる周期とコンピューター上のトラス構造物の周期について比較を行う。

以下、理論計算で得た振動の周期とシミュレーションで得た振動の周期とを比較したものを表3に示す。

表3 周期の誤差

振動のモード	周期の理論値(sec)	周期のシミュレーション結果(sec)	誤差(%)
1	1.7870074	1.79065953	0.54
2	0.2851524	0.284380669	0.27
3	0.1018390	0.101399112	0.43

ここで、理論計算には周期  $T=2\pi/\omega$  という式を用いた。誤差の欄を見れば、かなり小さな誤差で周期を得ることが可能であることが分かる。また、その波形を比較すればかなり近い波形を得た事が確認できる。今回のシミュレーションでは時間のステップを  $\Delta t=0.001$  としているが、 $\Delta t$ をどんどん小さくしていけばそれに伴い精度が向上する。また段数を増やせば、それは分割数を増やすことに相当するので精度が向上する。これらによって、シミュレーションのアルゴリズムとして分子動力学法を採用しても支障が無いことが分かる。

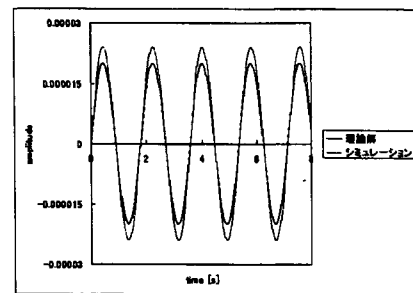


図8 波形の比較(p=0)

4.4 釣り合いの位置

中谷氏らの研究に従い、トラス構造物の弾性力と従動力による圧縮力が釣り合うような位置をあらかじめ数値計算で求め、その位置から解析解と同一の初速度を加えることにより、解析解とシミュレーション結果とを比較する。

釣り合いの位置を求めるプログラムアルゴリズムとしては、各質点に加わる力を求め、運動方程式を適用す

る際に速度  $v$  と逆方向でその大きさは定数と  $v$  との積である減衰項を付け加える。

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i - \gamma v_i$$

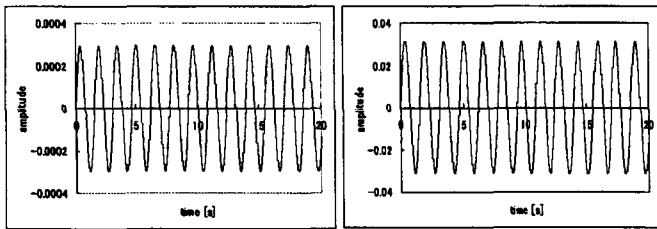
ここで  $\gamma$  は一定の係数である。この減衰項を考慮することにより、各質点の運動は次第に減衰し従動力と釣り合う位置で完全に停止する。

## 5. 結果および考察

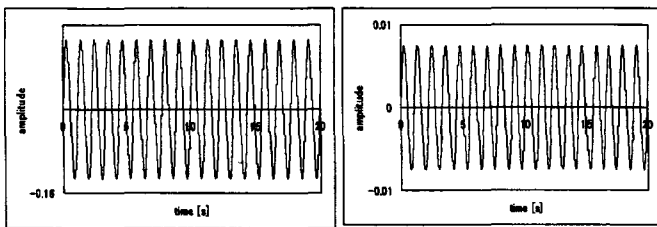
### 5.1 フラッター振動

#### 5.1.1 結果

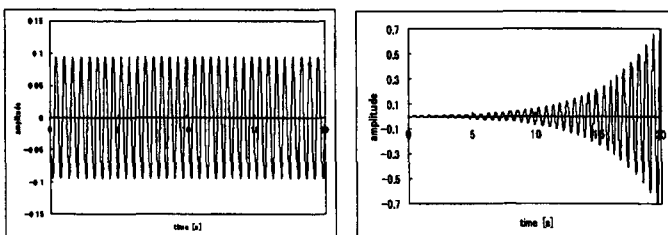
$x$  方向(初速度を与える方向)のトラス構造物の振動について、以下に示す。横軸はシミュレーションの実地時間を表し、縦軸はトラス構造物の全長 1000 に対してどれほどの振幅を持つかを示す。ここでは減衰は考えないものとしている。図 9 は、左に解析解の先端の変位を表し、右にシミュレーション結果のトラス構造物の先端の変位を表している。



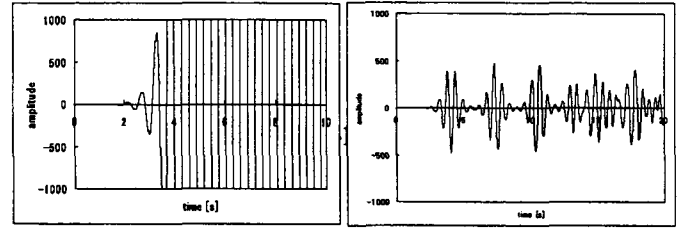
p = -2



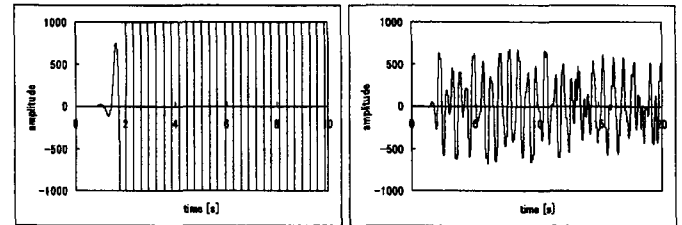
p = -6



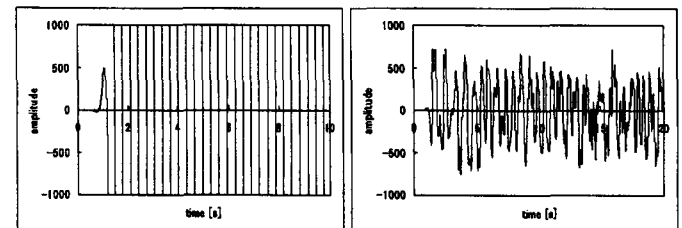
p = -10



p = -11



p = -14



p = -18

図 9 解析解とシミュレーション結果の比較

#### 5.1.2 考察

以上の結果から解析解、シミュレーション結果とも  $p = 0 \sim -9$  までは同じような結果を示す。シミュレーションの結果での振幅のオーダーが解析解の何倍かになっているが、これは時間ステップの微小化など、精度を増すことで解析解の値に近づく。臨界従動力  $p = -10$  より大きな従動力の場合、解析解とシミュレーションの結果では振舞いが著しく異なるのが分かる。先に臨界従動力は  $p = -10.0254$  と述べたが、図 15(e)では  $p = -10$  で既に指数関数的な振幅の増加が始まっている。これは複素数の範囲の  $\omega$  の固有値  $\omega_1$  が存在することを表しており、 $\omega_1$  が  $p = -10.254$  以下で存在している理由として段数の少なさが挙げられる。段数が少なければ少ないほど、臨界従動力は  $p = -10.0254$  より値は 0 に近づき、実際に段数が 10 段の場合の計算結果によると、臨界従動力は  $p = -8$  程度になる。臨界従動力以上の従動力では、解析解は時間とともに振幅が指数関数的に増加するのに対し、シミュレーション結果は一定の振幅・周波数を持つなりに似た周期振動になっている。この振動がフラッター現象であり、シミュレーションにより臨界従動力以上の従動力を受けるトラス構造物は実際にフラッター振動が起こっていること



がわかる。振幅が増加する様子を見れば、初めは線形の方程式に従って増加していることが伺える。その後、非線形効果が現れ振幅が減少し、再び線形の方程式に従い振幅が増加している。この事を繰り返して「うなり」に似たような振動が起こっているように見える。また、後に述べるが、時間がたつと「うなり」が周期的ではなくなっていくのは面外振動の影響によるものであると考えられる。

3.2節で見たように $\omega$ の複素固有値に対応する4つの線形独立な解が存在するが、その中の一つの

$$\text{Re}[f(x) \sin \omega t] = f_0(x) \sin(\omega_0 t) \cosh(\omega_1 t) - f_1(x) \cos(\omega_0 t) \sinh(\omega_1 t)$$

について考える。

右辺の第一項について

$$f_0(x) \cosh(\omega_1 t)$$

は $t \geq 0$ より、基本となる波形が指数関数的に時間とともに増加する事を示しており、第1項はこれを振幅として $\sin$ 関数で時間的に振動することを表している。第二項については同様のことが言え

$$f_1(x) \sinh(\omega_1 t)$$

で振幅が増加し、 $\cos$ 関数で時間的に振動することがわかる。よって、解析解の波形はこの二つの重ね合わせによって作られる。その波形を求めれば

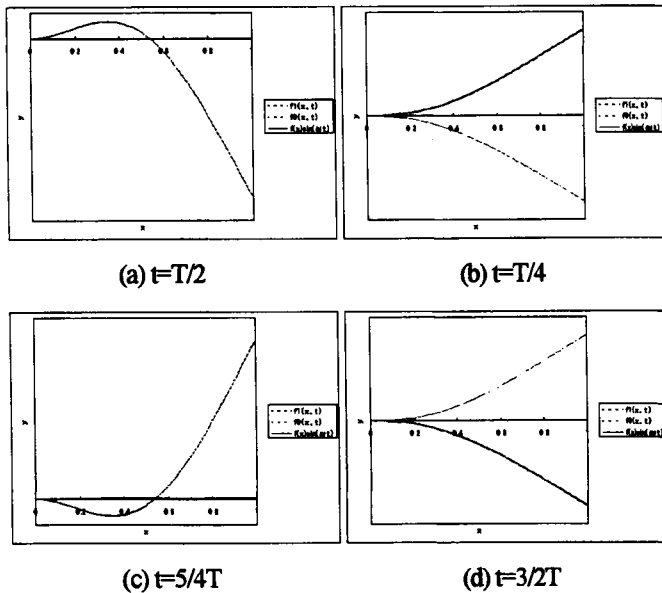


図10 解析解の波形

図10のような波形となる。 $f_0(x)$ は $\cos(\omega_0 t) = 0$ ,すなわち $T = 2\pi/\omega_0$ として $t = (n+1/4)T$ での波形を表し、 $f_1(x)$ は $\sin(\omega_0 t) = 0$ ,すなわち $t = (n+1/2)T$ での波形を表す。解析解

はこれらの波形を基本とする二つの波の重ね合わせで表現される。ここで注目すべきは、長さ方向に常に作用する従動力のy成分が先端部のy方向の速度と常に同じ向きを向くということである。これにより従動力が常に梁に正のエネルギーを加える結果、振幅が指数関数的に増大するということがエネルギーの面からも理解できる

次に、シミュレーションでの $p = -11$ におけるトラス構造物に与えられるエネルギーの推移とx方向の振動を示す。

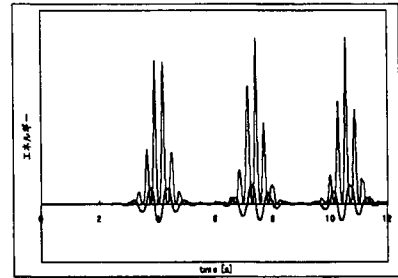


図11 シミュレーション結果におけるエネルギー( $p = -11$ )

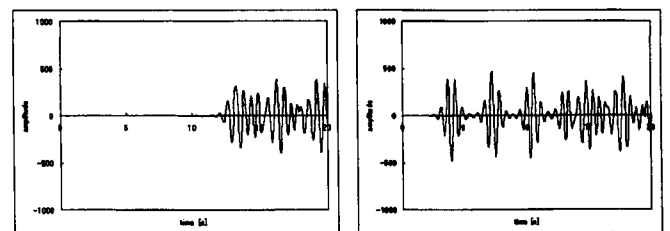
図11を見れば振幅が増大する場合、従動力はトラス構造物に正の仕事をしているが、振幅が減少する場合には負の仕事をしていることがよく理解できる。

## 5.2 面外振動

本研究では、与える初速度と断面に対して直角の関係にある振動を面外振動と定義している。臨界従動力以上の従動力をかけなければ面外振動は発生しにくいため、シミュレーション時間がとてつもなく長くなってしまふ。よってこれ以降、面外振動といえは臨界従動力以上の従動力の場合について考えている。

### 5.2.1 結果

まず、シミュレーション結果について図12に示す。左図は面外振動において、横軸を時間、縦軸を長さ1000に対してどれほどの振幅を持つかを表している。また右図には初速度方向の振動を載せる。図13は面外振動を断面から見た図である。



(a)  $p = -11$

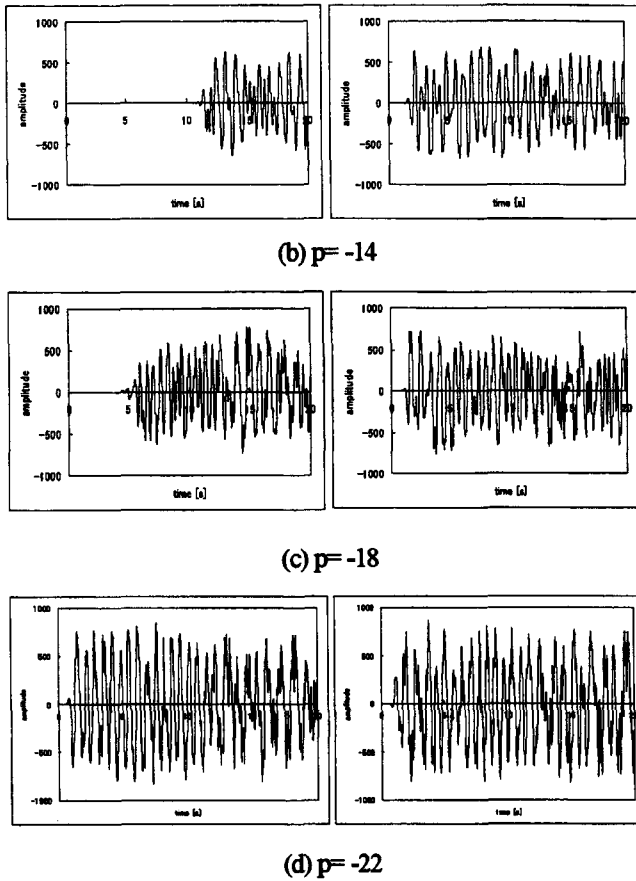


図 12 面外振動の様子

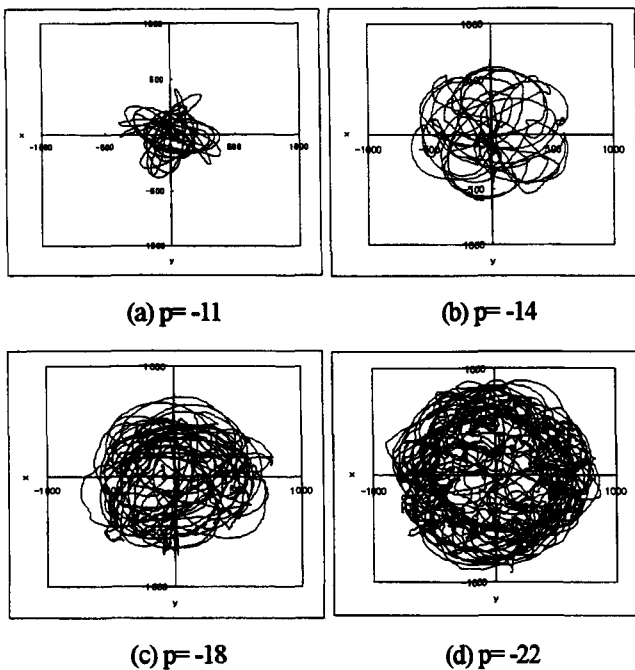


図 13 断面から見た面外振動

5.2.2 考察

図 12 を見れば従動力を増やすにしたがって、早い段階で面外振動が発生していることがわかる。また、フラッター振動を表す右図と比較すれば面外振動が発生する時間からフラッター振動における「うなり」の周期性が崩れている。

面外振動を断面から見れば(図 13), 一定の振幅を持ちその値はフラッター振動での振幅とほぼ同じであることが図より理解できる。これらより面外振動は、従動力を大きくすればするほど発生する時間が早まり、振幅が大きくなると言え、初速度方向の振動に影響を及ぼすと考えられる。

ではなぜ面外振動が発生するのかを考えるにあたり、まずフラッター振動の節で述べた線形の方程式に注目する。この方程式が示すことは、臨界従動力を超える従動力を与えられる構造物の振動の振幅は指数関数的に増加するということである。これによれば、わずかな変位や初速度が発生すれば、それらの方向に振動が発生し、その振幅は指数関数的に増加すると言い換えることが可能である。実際、シミュレーション結果の面外振動の振幅は指数関数的に増加している。

これらによって面外振動の発生の原因は、シミュレーション中に必然的に発生してしまう丸め誤差によって生じる非対称によるものではないかと考えることが出来る。そのことを確かめるために今回の研究では倍精度(1015桁程度の有効桁数)を適用しているが、わざと単精度(106桁程度の有効桁数)を適用しシミュレーションを行った結果が図 14 である。上図は単精度で行った結果を表し、下図は倍精度で行った結果を表す。

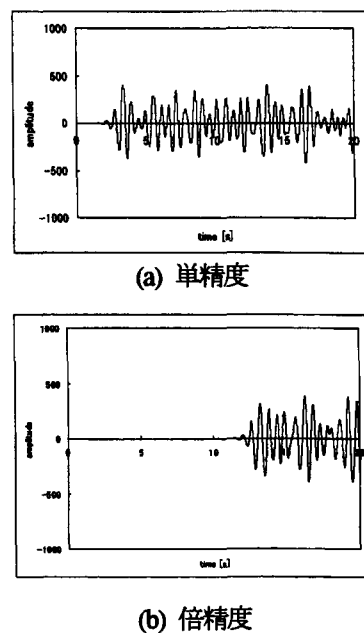


図 14 精度での比較(p=-11)

図 14 を見れば明らかなように単精度の場合、倍精度で

面外振動が発生する時間より早い時間で、面外振動が発生している。ここでは  $p = -11$  の場合のみの図を挿入しているが、臨界従動力以上の従動力ならば必ず精度が悪い場合の方が先に面外振動が発生する。よって、これらの結果より面外振動の発生メカニズムは、精度の粗悪さによって生じるということが言える。また、今回は初期条件に非対称境界条件を与えてシミュレーションを行うことはしなかったが、シミュレーション結果と同様に面外振動が発生すると言える。なぜならこの場合は、先ほど述べたシミュレーション中に必然的に生じる丸め誤差を、非対称な初期条件による対称性の破れで置き換えれば、上と同じように説明できるからである。後述するが、これは実際の従動力を受ける構造物における面外振動発生の原因であると考えられる。

## 6. 結論

従動力を受けるトラス構造物のフラッター振動について、まとめるとその発生メカニズムは図15のようになる。

まず、線形の方程式が示す所により、振幅が指数関数

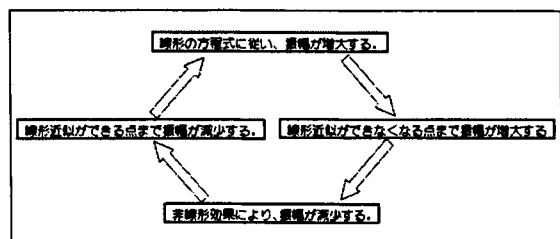


図15 フラッター振動発生メカニズム

的に増大する。線形近似が破れる点まで振幅が増大すると、非線形効果が現れ始め振幅が減少する。線形近似が出来る点まで振幅が減少すると、再び線形の方程式に従い振幅が増大するというサイクルを繰り返す、フラッター現象という周期的で一定振幅の振動が起こることが出来る。

この考えは面外振動にも適用することができ、コンピュータ上では必然的に生じる丸めの誤差による非対称が種となって上記のサイクルに基づいた振動が起こると考えられる。実際の従動力を受けるトラス構造物も図15のサイクルに従ってフラッター振動が発生すると言える。しかし実際の構造物の場合には、完全な対象や材料の完全平衡を再現するのは不可能であるため、その誤差によりシミュレーション結果より早い段階で面外振動が発生するであろう事を考慮しなければならない。

今回の研究の結果はトラス構造物に限らず、実際の様々な材料特性、長さの材料で構成される構造物にも適用することが出来る。なぜなら本研究は無次元量を基本としており、その普遍性が保たれる。また本研究で意味する段数を無限に増やせば、それは梁そのものとなるからである。

以上のことより実際の構造物と照らし合したければ、4章シミュレーションの表1と5章の結果と考察における結果のグラフを参考にし、実際の構造物特有の誤差を考慮すれば求めたい結果が得られるはずである。

## 参考文献

- 1) 中谷 敬子, 杉山 吉彦, “従動力を受けるトラス構造物の振動特性の分子動力学シミュレーション”, 日本材料学会第11回分子動力学シンポジウム proceedings, 2006年5月(長岡技術科学大学)